ECOLE NAVALE

№ 0626

CONCOURS 1980

Première composition de mathématiques

On considère le plan affine euclidien P, rapporté à une base orthonormée $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par A le point de P de coordonnées (1, 0).

1° Tracer sur une même figure les courbes définies par :

$$C : y = x\sqrt{x^2 - 1},\ y > 0 ;\ C_1 : y = \sqrt{x - 1}$$

On précisera la position des deux courbes l'une par rapport à l'autre ainsi que le point d'inflexion de C.

Montrer qu'il existe une droite D contenant A et tangente à C en un point A' différent de A; donner une valeur approchée des coordonnées de A'.

2-1. Montrer qu'à tout point M de C, de coordonnées (x, y), on peut associer un point M_1 de C_1, de coordonnées (x_1, y_1), tel que : $x.y = x_1.y_1$ (on exprimera x_1 en fonction de x).

2-2. Le point M et le point associé M_1 se projettent orthogonalement sur $(O , \vec{i})$ en m et m_1 respectivement; on note S (x) l'aire de la région du plan P limitée par les segments de droites Am et mM et par l'arc AM de C; on note S_1 (x_1) l'aire de la région du plan P limitée par les segments de droites Am_1 et m_1M_1 et par l'arc AM_1 de C_1. Montrer que pour M et M_1 associés comme il a été dit au 2-1, on a : $S_1 (x_1) = 2S (x)$; calculer S (x).

2-3. Les courbes C et C_1 sont orientées dans le sens des x croissants; l'origine des arcs est A; on note s (x) l'abscisse curviligne de M, point de C, et s_1 (x_1) l'abscisse curviligne de M_1, point de C_1. Montrer que pour M et M_1 associés comme il a été dit au 2-1, on a : $s (x) = s_1 (x_1)$; calculer $s (x)$.

2-4. Déterminer le nombre réel r de manière que, lorsque x tend vers 1, le rapport $\dfrac{s (x) - rs_1 (x)}{(x - 1)^{3/2}}$ ait une limite finie, que l'on calculera (attention, les points considérés dans cette question ont même abscisse).

3-1. On note E l'ensemble des fonctions numériques continues pour $x \geqslant 1$ et telles que, pour toute fonction f de E : $f (1) = 0$ et $f (x) > 0$ pour $x > 1$. f étant un élément donné de E, on se propose de déterminer une fonction f_K de E définie de la manière suivante :

Γ et Γ_K désignent les courbes d'équations respectives : $y = f (x)$, $y = f_K (x)$; M est un point d'abscisse x de Γ, projeté orthogonalement en m sur $(O ; \vec{i})$; M_K est un point d'abscisse x_K de Γ_K, projeté orthogonalement en m_K sur $(O , \vec{i})$; on note $\Sigma (x)$ l'aire de la région de P limitée par les segments de droites Am et mM et par l'arc AM de Γ; on note $\Sigma_K (x_K)$ l'aire de la région du plan P limitée par les segments de droites Am_K et m_KM_K et par l'arc AM_K de Γ_K; on considère x_K comme une fonction dérivable de x; f étant un élément donné de E, déterminer un élément f_K de E tel que l'on ait à la fois :
$x.f (x) = x_K f_K (x_K)$ et $2 \Sigma (x) = k\Sigma_K (x_K)$, k étant un réel donné, strictement positif.

3-2. On choisit : $f (x) = x\sqrt{x^2 - 1}$; indiquer, selon les valeurs de k, l'allure des courbes Γ_K; déterminer l'ensemble des points des courbes Γ_K où la tangente est parallèle à $(O , \vec{i})$, quand k décrit l'intervalle $\left]0, \frac{2}{3}\right[$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail